Wybrane **wzory matematyczne** na egzamin maturalny z matematyki

EM 23

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Zespół redakcyjny:
Hubert Rauch (CKE)
Mariusz Mroczek (CKE)
Marian Pacholak (OKE Warszawa)
dr Wioletta Kozak (CKE)
dr Marcin Smolik (CKE)
dr Roman Wosiek
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
Joanna Berner (OKE Warszawa)
Piotr Ludwikowski (OKE Kraków)

Recenzenci:
dr hab. Jan Jakóbowski (UWM)
Agata Górniak (recenzja nauczycielska)

Spis treści

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \ \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \ x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$|x - a| \leq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

  – dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

  – dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

  – dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.
  Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.
  Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. Silnia. Współczynnik dwumianowy

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

7. Funkcja kwadratowa

- <u>Wyróżnikiem</u> Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R})$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

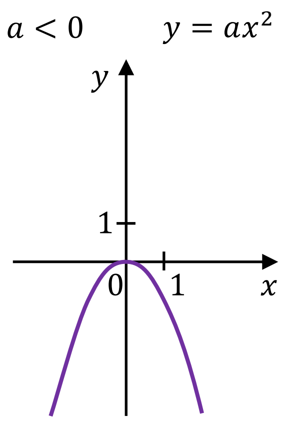
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

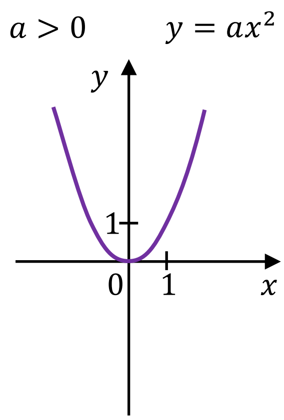
- <u>Postać ogólna funkcji kwadratowej</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.





- <u>Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$

  (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ:

  1. jeżeli $\mathbf{\Delta > 0}$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  2. jeżeli $\mathbf{\Delta = 0}$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

  $$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

  3. jeżeli $\mathbf{\Delta < 0}$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- <u>Postać kanoniczna funkcji kwadratowej</u>:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Wzory Viète'a

  Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

8. CIĄGI

- Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla} \quad q \neq 1 \qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla} \quad q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

  Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q. Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dla $n \geq 1$.

  Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

  Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

  Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n), określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a ponadto:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

  Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

  Jeżeli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n), określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

- Procent składany

  Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Wybrane granice:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ dla każdego $a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ dla każdego $q \in (-1, 1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k} = 0$ dla każdego $k > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ dla każdego $k > 0$

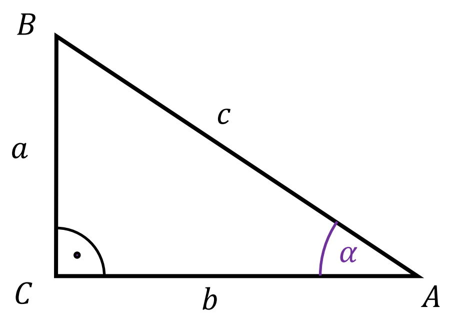
9. TRYGONOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

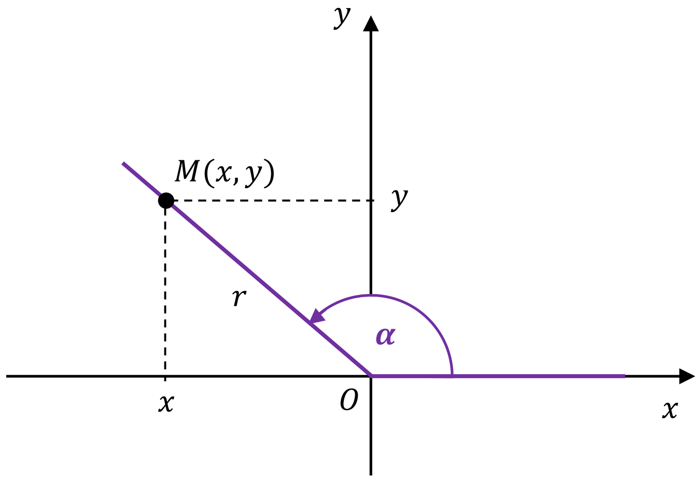
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

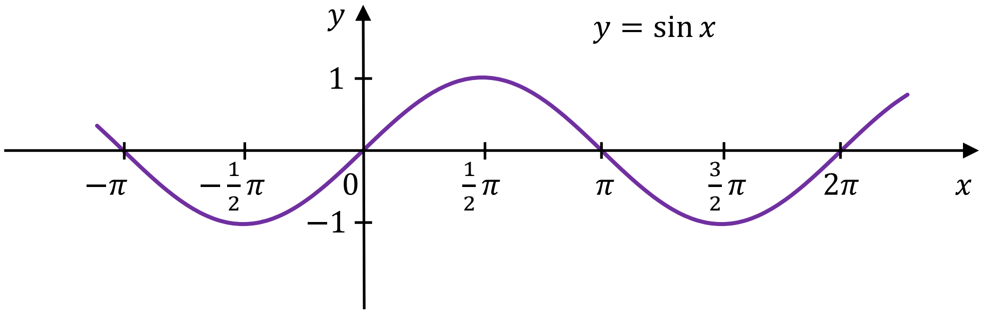
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$

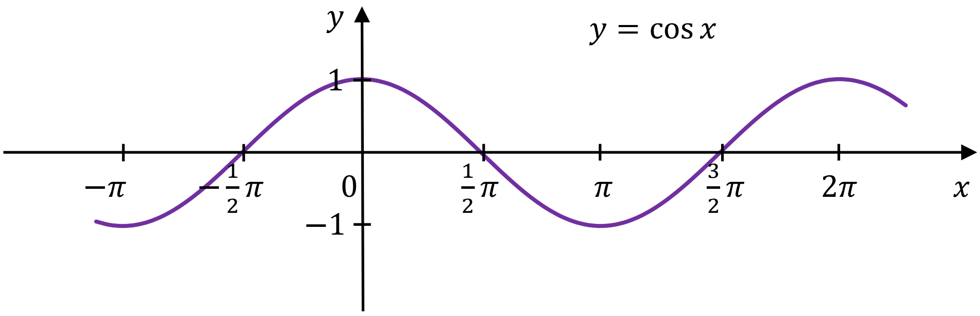
gdzie

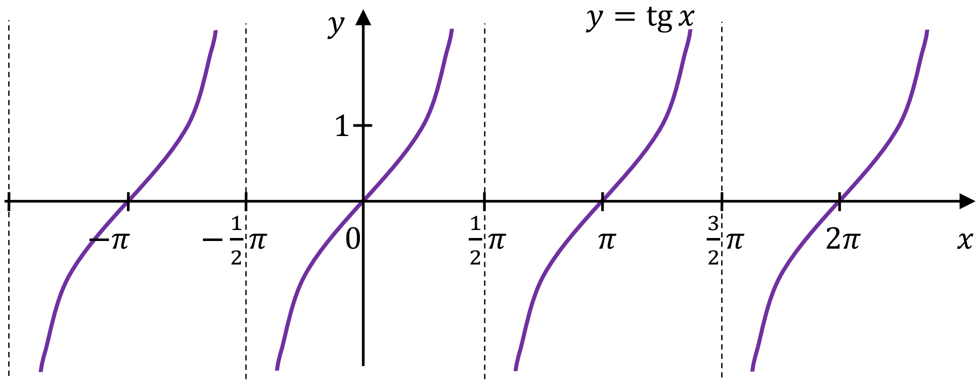
$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych







- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{o ile} \quad \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2\alpha\neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

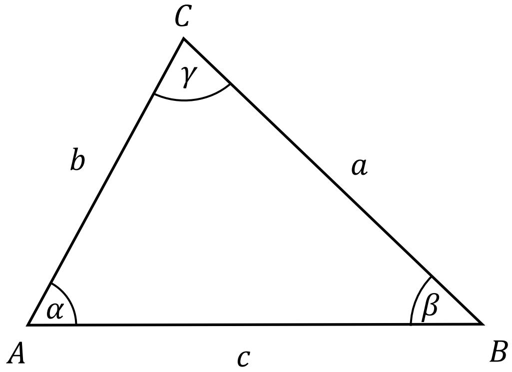
Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos\alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$ (gdzie $m \in \mathbb{Z}$), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$$

10. Planimetria



Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C

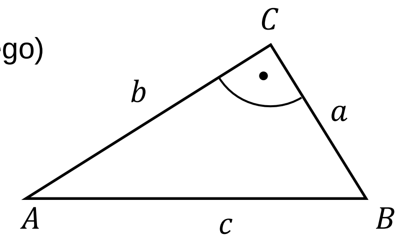
R, r – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C.

p – połowa obwodu trójkąta ABC, tj.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

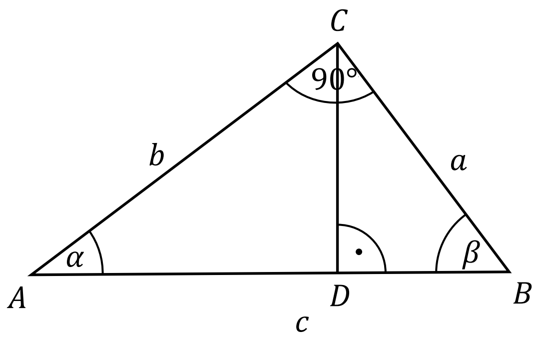
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = b \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}$$

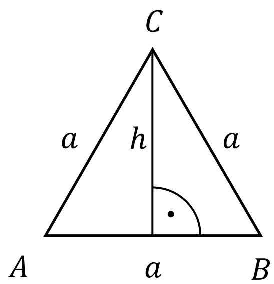


- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

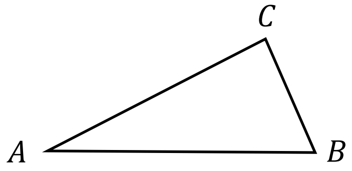
a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

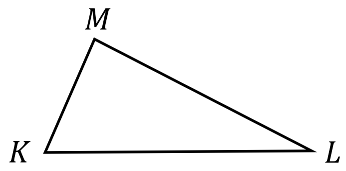
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \qquad R = \frac{2}{3}h$$



- <u>Cechy przystawania trójkątów</u>





a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$

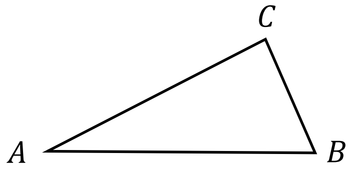
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

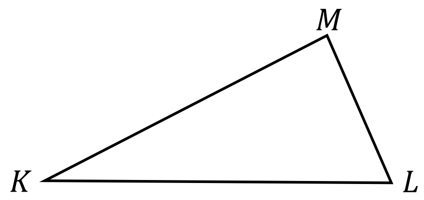
długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

- <u>Cechy podobieństwa trójkątów</u>





a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM, np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$

- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnętrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D, to:

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

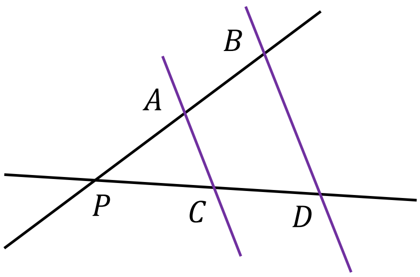
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

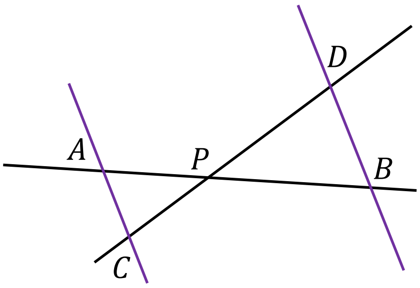
Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym spełniony jest jeden z warunków:

– punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
– punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD.

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|}=\frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|}=\frac{|CD|}{|PC|}$.

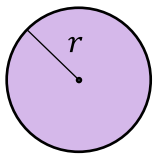




- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P=\pi r^2$$

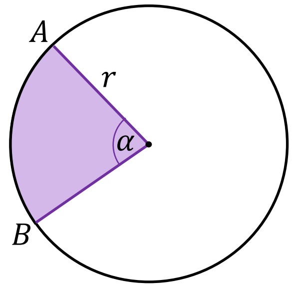


Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L=2\pi r$$

- <u>Wycinek koła</u>

  Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:



$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

  Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

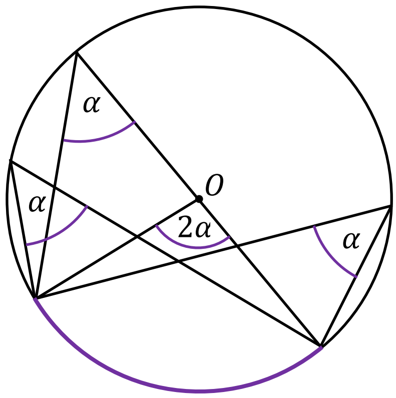
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- <u>Kąty w okręgu</u>

  Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

  W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

  Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.

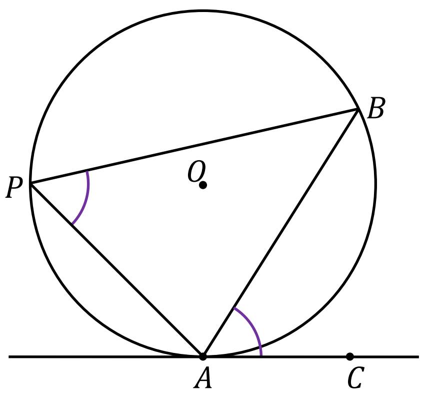


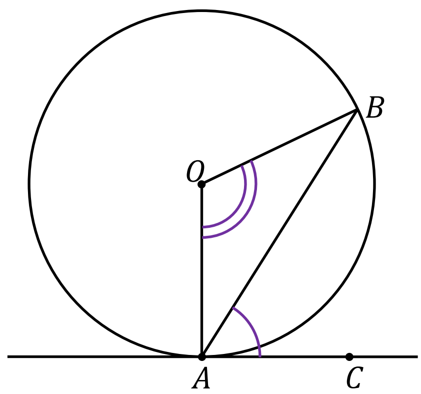
- <u>Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą</u>

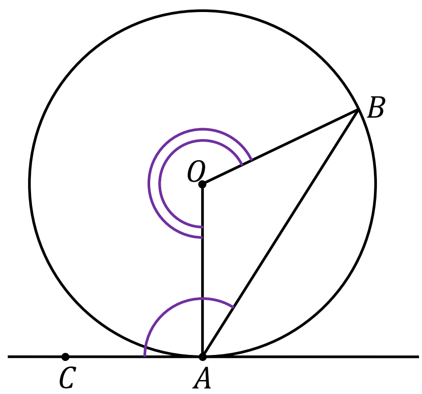
  Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A, natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB. Wtedy:

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

  przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.



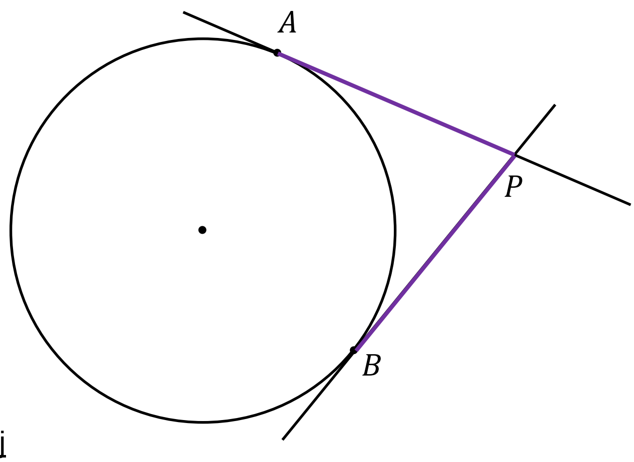




- <u>Twierdzenie o odcinkach stycznych</u>

  Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:

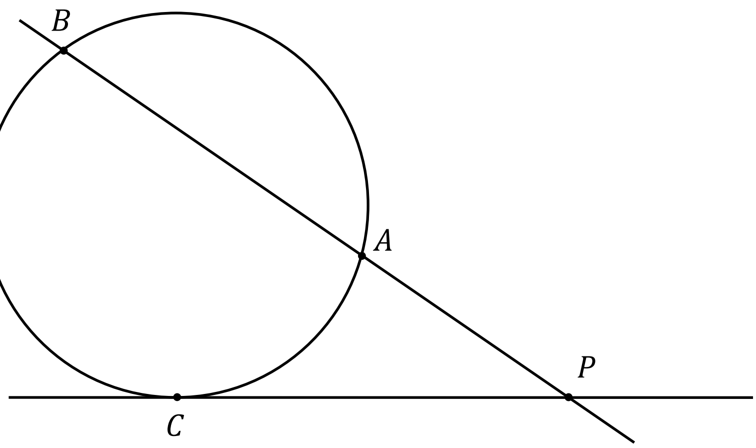
$$|PA| = |PB|$$



- <u>Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej</u>

  Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to:

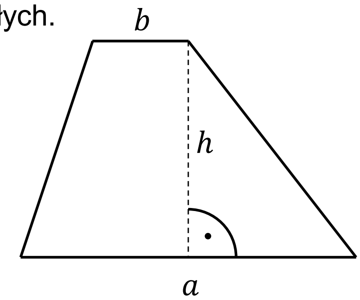
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



- <u>Czworokąty</u>

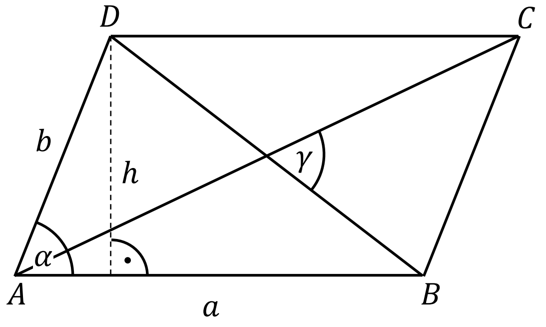
  Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
  Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



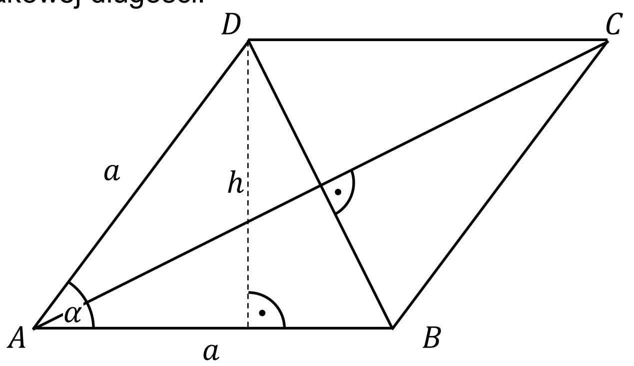
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



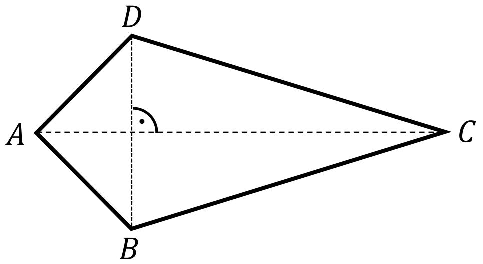
Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole P deltoidu:

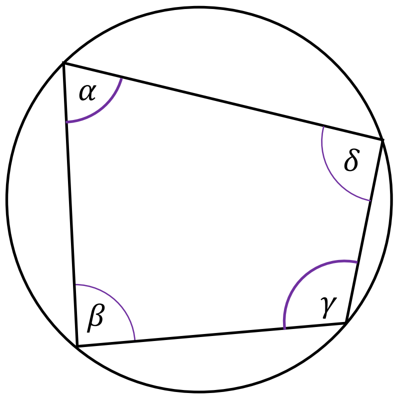
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- <u>Okrąg opisany na czworokącie</u>

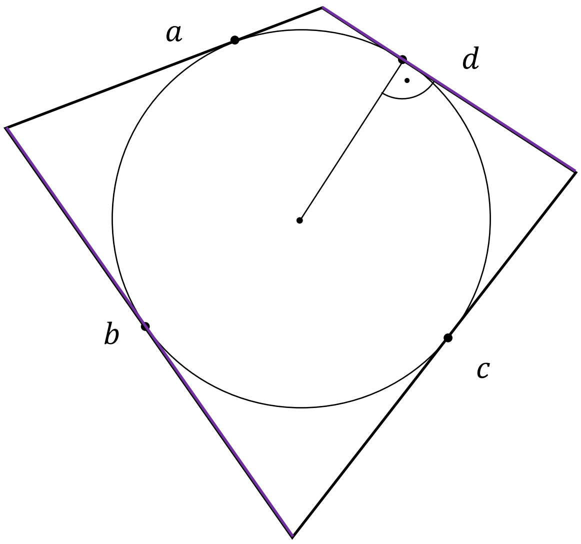
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$
$$\alpha + \gamma = 180° \qquad \beta + \delta = 180°$$



- <u>Okrąg wpisany w czworokąt</u>

  W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.



$$a + c = b + d$$

- <u>Pola figur podobnych</u>

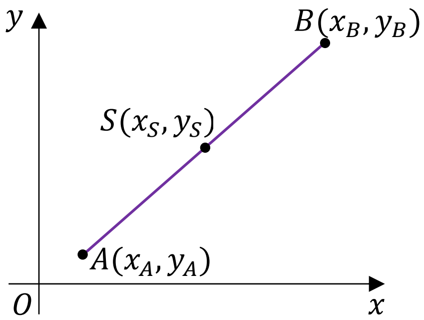
  Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

11. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

- <u>Długość odcinka</u>

  Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

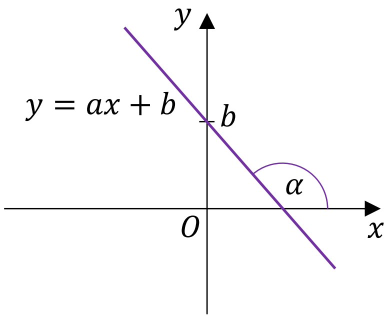
- <u>Współrzędne środka odcinka</u>

  Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- <u>Równanie kierunkowe prostej</u>

  Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to można opisać ją równaniem kierunkowym:



$$\boxed{y = ax + b}$$

  Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$\boxed{a = \operatorname{tg} \alpha}$$

  Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$\boxed{y = a(x - x_0) + y_0}$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

gdzie

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{gdy} \quad x_B \neq x_A$$

- <u>Równanie ogólne prostej</u>

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0}$$

  Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$\boxed{(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0}$$

- <u>Proste równoległe</u>

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1 x + b_1$ oraz $y = a_2 x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{a_1 = a_2}$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ oraz $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0}$$

- <u>Proste prostopadłe</u>

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1 x + b_1$ oraz $y = a_2 x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = -1}$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ oraz $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0}$$

- <u>Odległość punktu od prostej</u>

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$\boxed{d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

- <u>Równanie okręgu</u>

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci ogólnej:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$$

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$.

- Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ zaczepionego w punkcie A:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami oraz $a \in \mathbb{R}$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad\qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością $|\vec{u}|$ wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

- Przekształcenia geometryczne

Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x + a, y + b)$.

Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$.

Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$.

Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$.

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$.

- Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

- Współrzędne środka ciężkości trójkąta

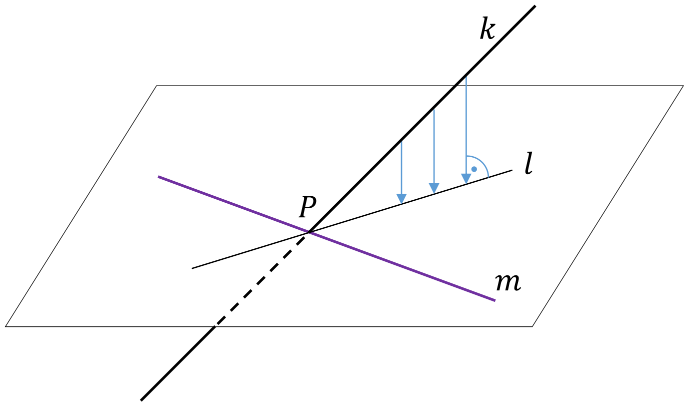
Współrzędne środka ciężkości $S = (x_S, y_S)$ trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$, czyli punktu przecięcia jego środkowych:

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

12. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P.
Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej l.



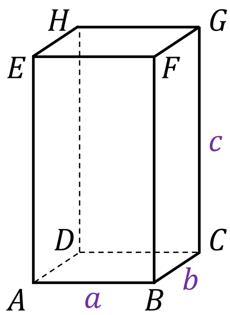
Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$
$$V = abc$$

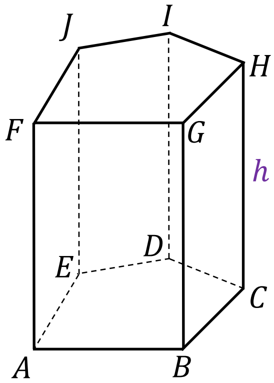
gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu



- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

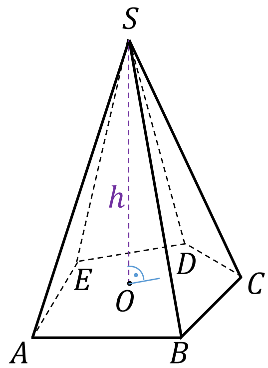
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

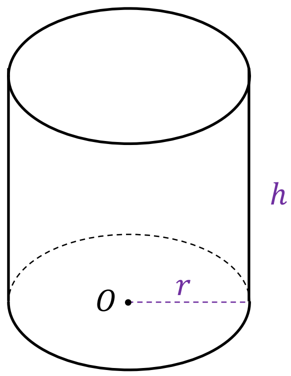
gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



- Walec

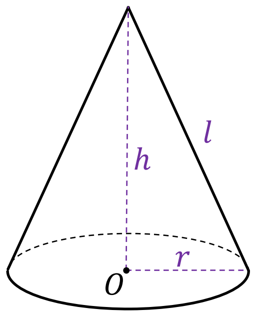
$$P_b = 2\pi r h$$
$$P_c = 2\pi r(r + h)$$
$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.



- Stożek

$$P_b = \pi r l$$
$$P_c = \pi r(r + l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

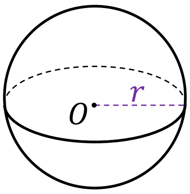


gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

13. Kombinatoryka

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów $(0 \leq k \leq n)$, jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k.

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k różnych wyrazów $(1 \leq k \leq n)$, jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

  Niech Ω będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast P – prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Wtedy:

  $0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

  $P(\emptyset) = 0$

  $P(\Omega) = 1$

  $P(A) \leq P(B)$ dla każdych zdarzeń A oraz B takich, że $A \subset B \subset \Omega$

  $P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla każdych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla każdych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

  Niech Ω będzie niepustym skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe:

  $$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

  gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A, natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

- Schemat Bernoullego

  Próbą Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p, to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

  Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów ($0 \leq k \leq n$) jest równe:

  $$\boxed{P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:
1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:
1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k $(1 \leq k \leq n)$ prawdziwa jest równość:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, określoną na zbiorze Ω, przy czym $P(\{\omega : \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna $\bar{g}$ z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa $\bar{k}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \ldots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ \ldots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbb{R}$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ gdy $g(x) \neq 0$

$$\left[g\big(f(x)\big)\right]' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

- Pochodne wybranych funkcji

Niech a, b, c, r będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie e jest liczbą Eulera; $e \approx 2{,}72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f(x_0)\right)$ dane jest wzorem:

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α [°]	sin α	cos α	tg α
0	**0,0000**	**1,0000**	**0,0000**
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	**0,0872**	**0,9962**	**0,0875**
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	**0,1736**	**0,9848**	**0,1763**
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	**0,2588**	**0,9659**	**0,2679**
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	**0,3420**	**0,9397**	**0,3640**
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	**0,4226**	**0,9063**	**0,4663**
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	**0,5000**	**0,8660**	**0,5774**
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	**0,5736**	**0,8192**	**0,7002**
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	**0,6428**	**0,7660**	**0,8391**
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	**0,7071**	**0,7071**	**1,0000**

α [°]	sin α	cos α	tg α
45	**0,7071**	**0,7071**	**1,0000**
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	**0,7660**	**0,6428**	**1,1918**
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	**0,8192**	**0,5736**	**1,4281**
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	**0,8660**	**0,5000**	**1,7321**
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	**0,9063**	**0,4226**	**2,1445**
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	**0,9397**	**0,3420**	**2,7475**
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	**0,9659**	**0,2588**	**3,7321**
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	**0,9848**	**0,1736**	**5,6713**
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	**0,9962**	**0,0872**	**11,4301**
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	**1,0000**	**0,0000**	–

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 99
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

ISBN 978-83-66725-01-0
9 788366 725010