

5. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym nazywamy funkcję:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

określoną dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie a, b, c są stałymi i $a \neq 0$.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**. Znak współczynnika a decyduje o tym, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$: do góry ($a > 0$) czy do dołu ($a < 0$).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

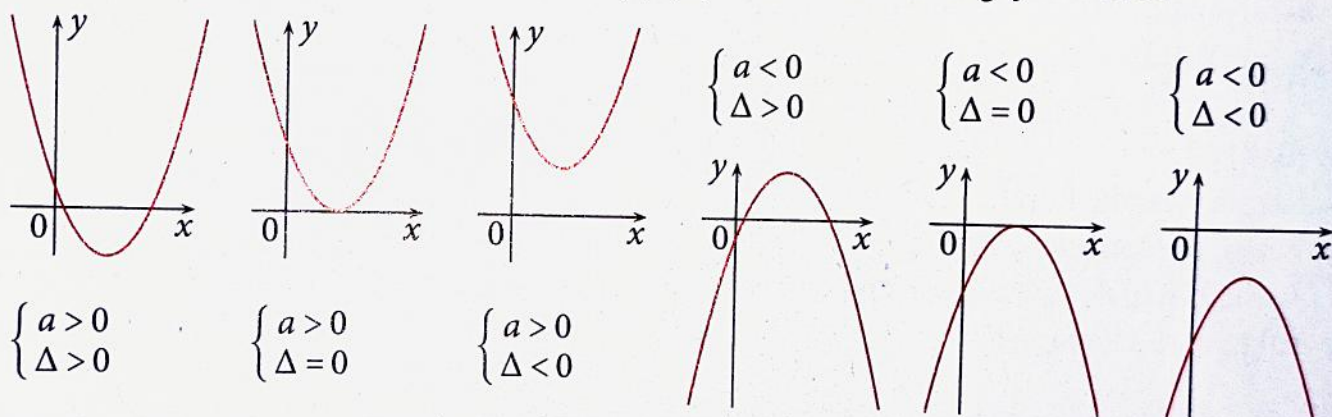
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (nazywamy je **pierwiastkiem podwójnym**).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ względem osi x



Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

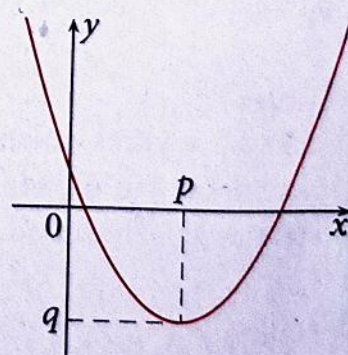
Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać **kanoniczna**: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$.

Współrzędne wierzchołka paraboli: (p, q) , gdzie:

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$



- Postać **iloczynowa**:

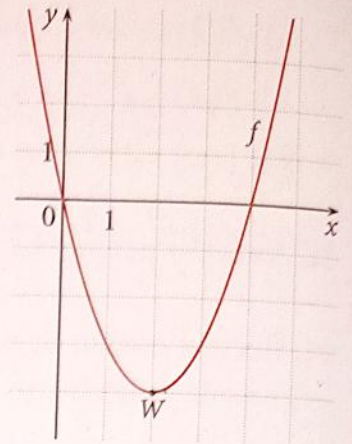
- jeśli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
- jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
- jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

Zestaw B. Zadania zamknięte

W zadaniach 33–40 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Informacja do zadań 33–35

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .



33. (0–1) CKE maj 2019 PP

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty; 0]$ B. $[0; 4]$ C. $[-4; \infty)$ D. $[4; \infty)$

34. (0–1) CKE maj 2019 PP

Największa wartość funkcji f w przedziale $[1; 4]$ jest równa

- A. -3 B. -4 C. 4 D. 0

35. (0–1) CKE maj 2019 PP

Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

- A. $y = -4$ B. $x = -4$ C. $y = 2$ D. $x = 2$

36. (0–1) CKE maj 2018 PP

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

- A. $(-6, -3)$ B. $(-6, 69)$ C. $(3, -12)$ D. $(6, -3)$

37. (0–1)

Wierzchołek paraboli $y = x^2 + 4x$ leży na prostej danej równaniem

- A. $y = -x$ B. $y = x$ C. $y = 2x$ D. $y = 4x$

38. (0–1) CKE maj 2021 PP

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2(x+1)(x-3)$ jest malejąca w przedziale

- A. $[1; \infty)$ B. $(-\infty; 1]$ C. $(-\infty; -8)$ D. $[-8; \infty)$

39. (0–1) CKE maj 2020 PP

Równanie $x(x-2) = (x-2)^2$ w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. nie ma rozwiązań. C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$. D. ma dwa różne rozwiązania: $x = 1$ i $x = 2$.

40. (0–1)

Wskaż nierówność, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

- A. $6x^2 + x + 1 > 0$ C. $x^2 - 100x + 25 \geq 0$
B. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} > 0$ D. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

41. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 - 4x + 1$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

41.1. (0-1)

Funkcja f jest rosnąca w przedziale

- A. $(-\infty; -2]$ B. $(-\infty; -1]$ C. $(-\infty; 1]$ D. $[1; \infty)$

41.2. (0-1)

Funkcja f w postaci kanonicznej jest opisana wzorem

- E. $f(x) = -(x-4)^2 + 1$ G. $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
 F. $f(x) = -(x+4)^2 + 5$ H. $f(x) = -(x+2)^2 + 5$

42. (0-2)

Liczba x_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania $x^2 - 6x + 6 = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $x_1 + a$ jest liczbą wymierną mniejszą od x_1 dla

- A. $a = 1\frac{1}{2}$ C. $a = \sqrt{3} - 4$ E. $a = \sqrt{3}$ G. $a = 3 - \sqrt{3}$
 B. $a = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ D. $a = 3 - \frac{3}{4}\sqrt{3}$ F. $a = -(3 - \sqrt{3})^2$ H. $a = \sqrt{3} - 6$

43. (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = -(x+3)^2 + 2$. Funkcje g i h są określone za pomocą funkcji f :
 $g(x) = f(-x) - 3$, $h(x) = -f(x) + 3$.

Każdej z funkcji g i h przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A-F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
43.1	g	
43.2	h	

