13. Rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n-tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne (żadne dwa nie mają wspólnych elementów), to:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Prawdopodobieństwo klasyczne

Jeżeli Ω jest skończonym i niepustym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własności prawdopodobieństwa

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
- $P(\varnothing) = 0$ ($\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe), $P(\Omega) = 1$ (Ω – zdarzenie pewne)
- $P(A) \leqslant P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Ile liczb o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć ze wszystkich podanych cyfr?

a) 1, 2, 3 **b)** 4, 5, 6, 7 **c)** 0, 1, 2, 3, 5, 7

2. Tworzymy kody, w których na początku występują cyfry, a następnie litery. Ile jest takich kodów, jeżeli wykorzystujemy wszystkie litery i cyfry poniższego kodu oraz cyfry i litery nie mogą się powtarzać?

a) 35ABC **b)** 2468EF **c)** 2357ADGHF

3. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7 i 8 oraz:

a) żadna cyfra się nie powtarza, **b)** cyfry mogą się powtarzać?

4. Numery dowodów osobistych składają się z trzech liter i sześciu następujących po nich cyfr. Oblicz, ile może być dowodów z numerami, w których występują jedynie litery A, P i R (mogą się one powtarzać) oraz:

a) cyfry się nie powtarzają, **b)** cyfry mogą się powtarzać.

W zadaniach 26–40 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

26. (0–1)

Ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których zapisie występują jedynie cyfry 2, 3 i 7 oraz cyfry mogą się powtarzać?

A. 18 **B.** 27 **C.** 32 **D.** 42

27. (0–1) CKE maj 2018 PP

Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych mniejszych od 2018 i podzielnych przez 5?

A. 402 **B.** 403 **C.** 203 **D.** 204

28. (0–1) CKE maj 2020 PP

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych utworzonych z cyfr 1, 3, 5, 7, 9, w których cyfry się nie powtarzają?

A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 25

29. (0–1) CKE maj 2021 PP

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych większych od 700, w których każda cyfra należy do zbioru $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ i żadna cyfra się nie powtarza, jest

A. 108 **B.** 60 **C.** 40 **D.** 299

30. (0–1)

Na ile sposobów 3 osoby mogą wybrać stacje metra, na których wysiądą, jeśli wiadomo, że do końca trasy zostało 8 stacji, a każda z tych osób chce wysiąść na innej?

A. 336 **B.** 512 **C.** 6561 **D.** 6720

31. (0–1)

Jaka jest najmniejsza liczba naturalna n, dla której wszystkich liczb n-cyfrowych jest więcej niż wszystkich liczb 10-cyfrowych o różnych cyfrach?

A. $n = 5$ **B.** $n = 6$ **C.** $n = 7$ **D.** $n = 8$

32. (0–1)

Każdego ucznia pewnej klasy poproszono o wskazanie ulubionego miesiąca roku. Liczba wszystkich możliwych odpowiedzi w grupie dziewcząt jest 144 razy większa niż w grupie chłopców. O ile więcej jest w tej klasie dziewcząt niż chłopców?

A. O 1. **B.** O 2. **C.** O 3. **D.** O 4.

33. (0–1)

Rzucamy 4 razy monetą. Wskaż zdarzenie przeciwne do zdarzenia: wypadło więcej reszek niż orłów.

A. Wypadło więcej orłów niż reszek.
B. Wypadły co najmniej 2 reszki.
C. Wypadły co najmniej 2 orły.
D. Wypadła co najwyżej 1 reszka.

14. Wiadomo, że $B \subset A$, $P(A) = 0{,}8$ oraz $P(B) = 0{,}5$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

15. **a)** Wiadomo, że $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$ i $P(A \cup B) = 0{,}9$. Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$.

b) Wiadomo, że $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$.

c) Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym. Oblicz $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$.

16. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, jeżeli wiadomo, że:

a) $9P(A) \cdot P(A') = 2$, **b)** $\frac{P(A)}{P(A')} = 3$.

17. W pierwszej urnie jest 8 kul białych i 2 czarne, a w drugiej urnie są 2 kule białe i n czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z pierwszej urny jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej z drugiej urny. Oblicz n.

18. W urnie jest 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula oznaczona liczbą:

a) większą od 8, **b)** podzielną przez 5, **c)** podzielną przez 3 lub 5.

19. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest podzielna przez 11.

20. Spośród liczb naturalnych od 1 do 20 losujemy bez zwracania trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie wśród nich 1 lub 2.

21. Losujemy jedną liczbę ze zbioru $\{11, 12, \ldots, 999, 1000\}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy liczbę trzycyfrową parzystą, w której zapisie są dokładnie dwie cyfry 6.

22. Marek założył się z Darkiem, że ze zbioru wszystkich liczb pięciocyfrowych dodatnich wylosuje liczbę parzystą, w której zapisie nie ma cyfry 0, a cyfra 3 pojawia się dokładnie trzy razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Marek wygra zakład.

23. Ze zbioru liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba okaże się nieparzysta, a w jej zapisie będzie dokładnie jedna cyfra 7, dokładnie jedna cyfra 2 oraz nie będzie cyfry 0.

24. Ze zbioru wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie będą dokładnie dwie cyfry 4.

25. Z worka, w którym jest 5 par butów, wyjmujemy losowo 2 buty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięte buty tworzą parę.