1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Liczby naturalne to liczby: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbb{Z}$.

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Potęga o wykładniku całkowitym

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$

Potęga o wykładniku wymiernym

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ dla $a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad$ $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\quad$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geqslant 0$:
$\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$

Dla parzystej liczby $n \in \mathbb{N}$ i $a \geqslant 0$:
$\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Pierwiastek sześcienny

Dla $a \in \mathbb{R}$:
$\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Dla nieparzystej liczby $n \in \mathbb{N}, n > 1$ i $a \in \mathbb{R}$:
$\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Działania na pierwiastkach

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dla $a, b \geqslant 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dla $a \geqslant 0, b > 0$

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ dla $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Działania na pierwiastkach dowolnego stopnia parzystego (nieparzystego) wykonuje się tak samo jak działania na pierwiastkach kwadratowych (sześciennych).

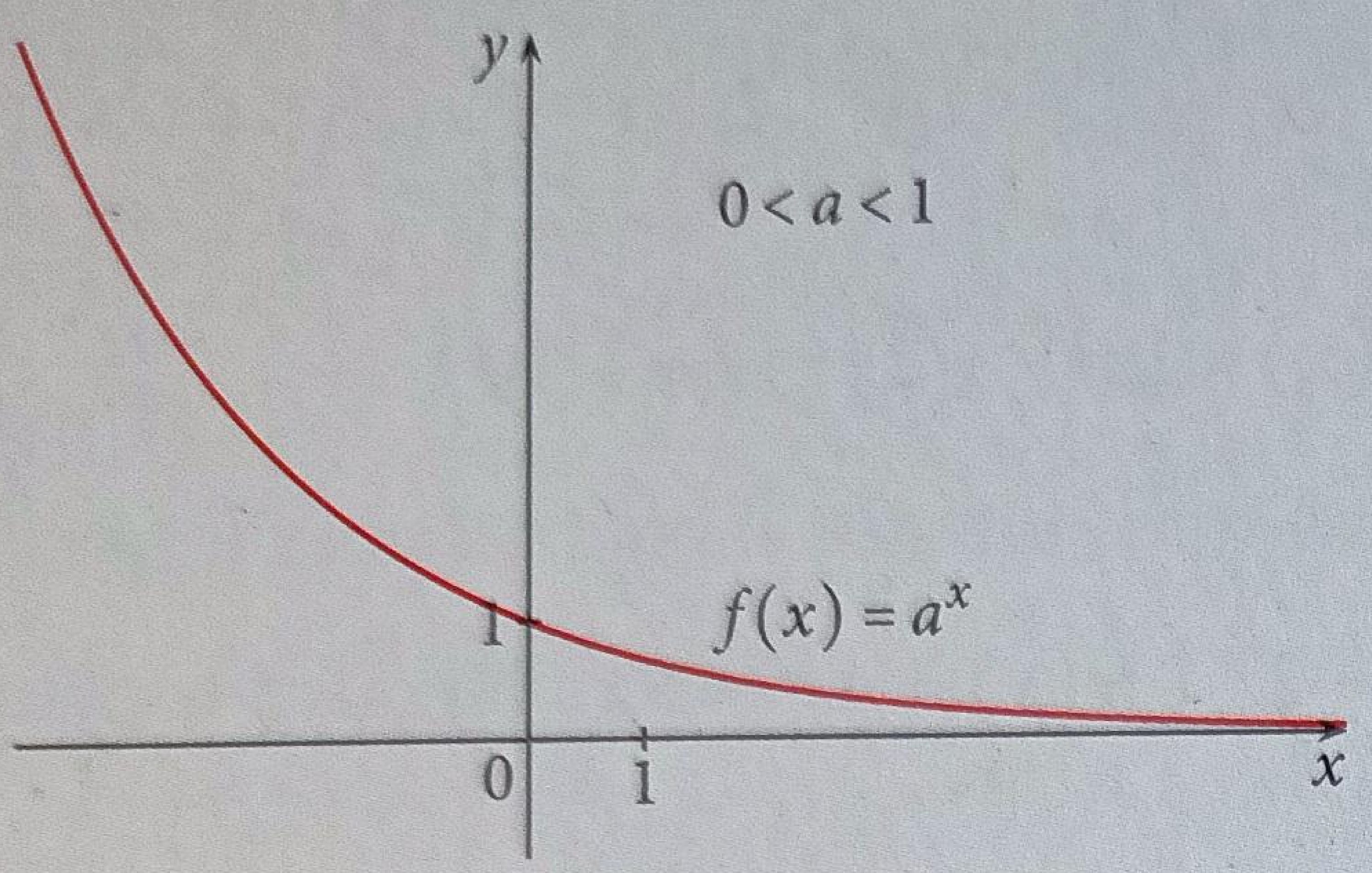
Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

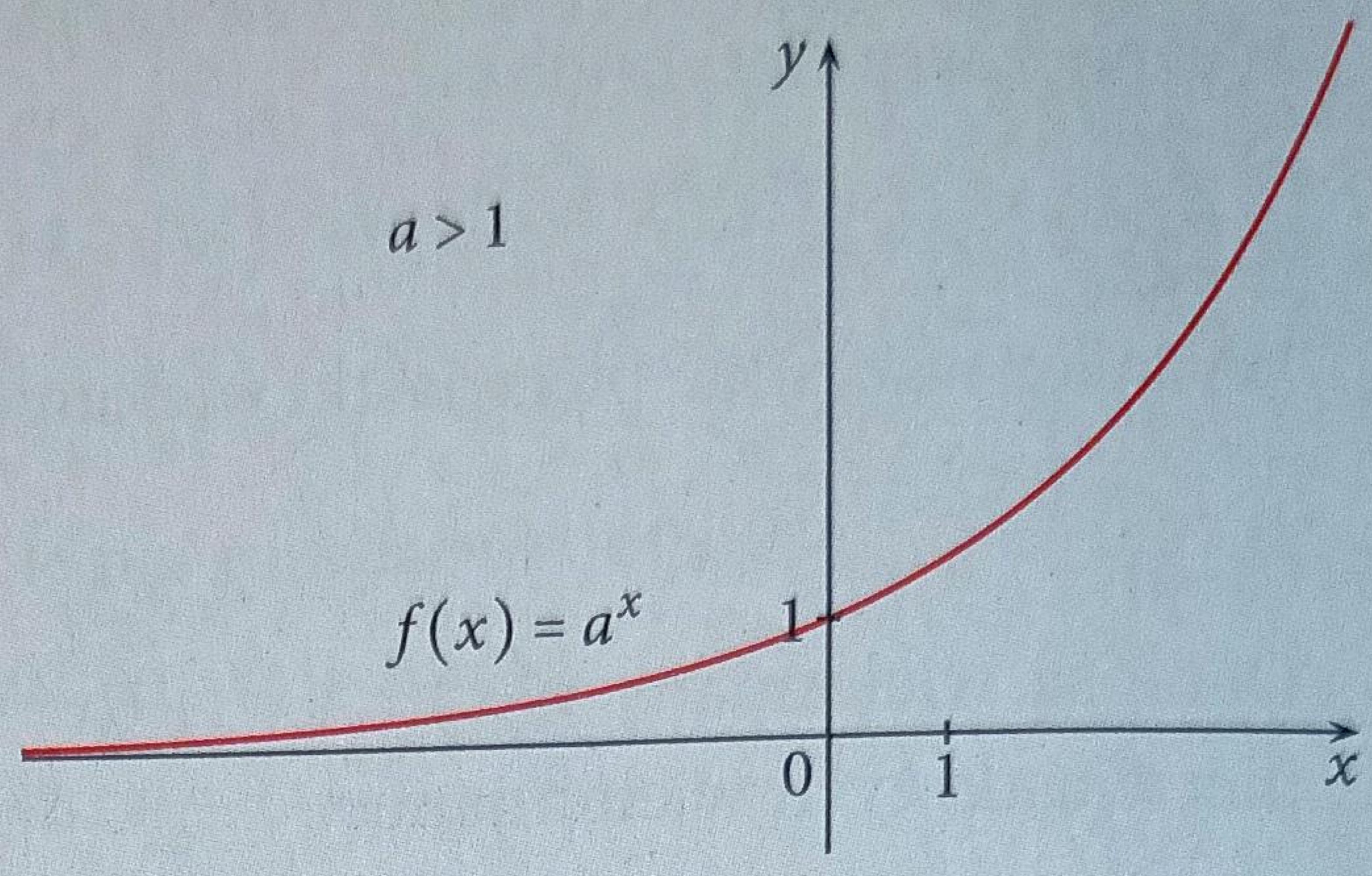
7. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Logarytm

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, wówczas:

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli a, b, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

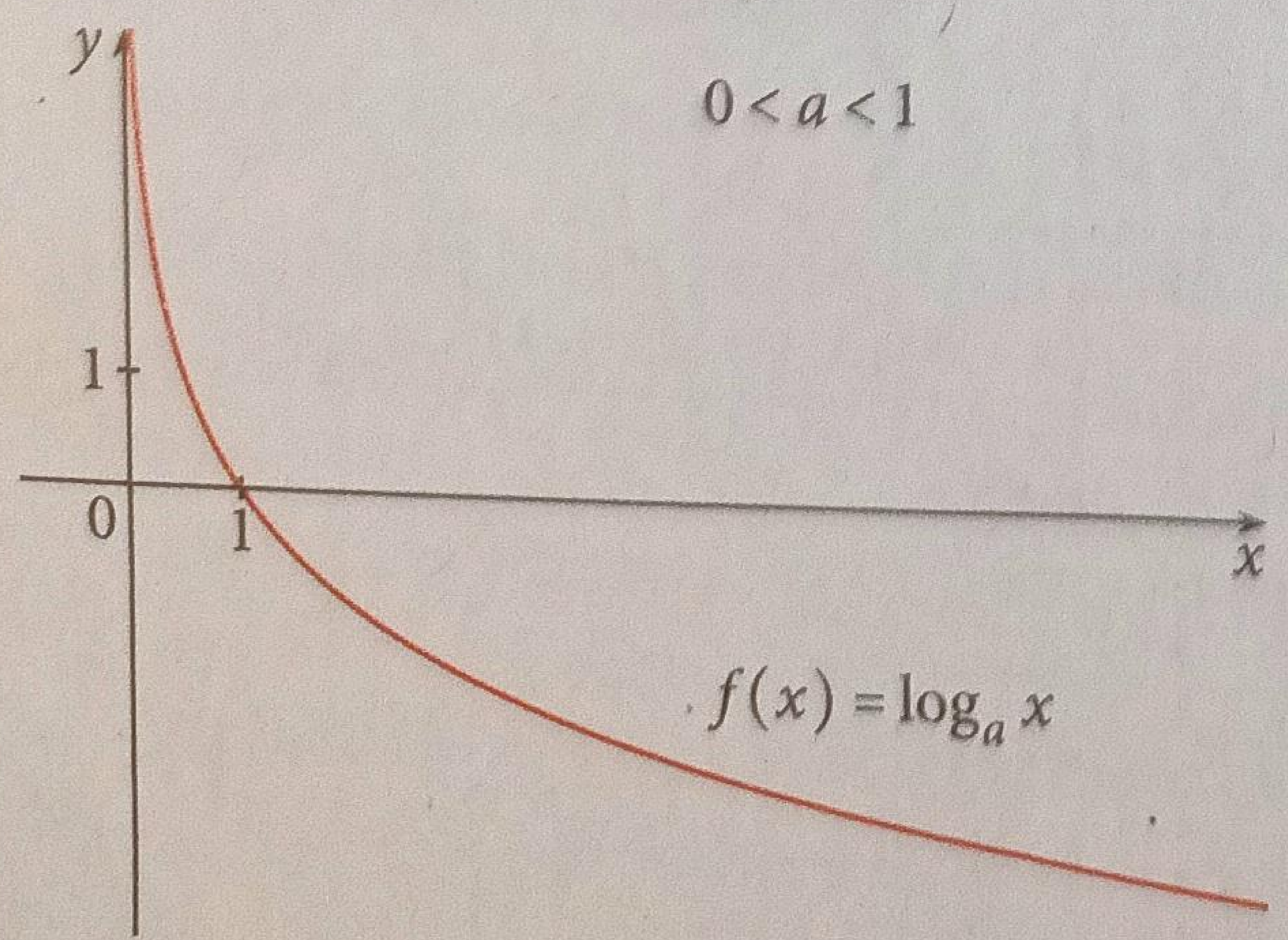
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

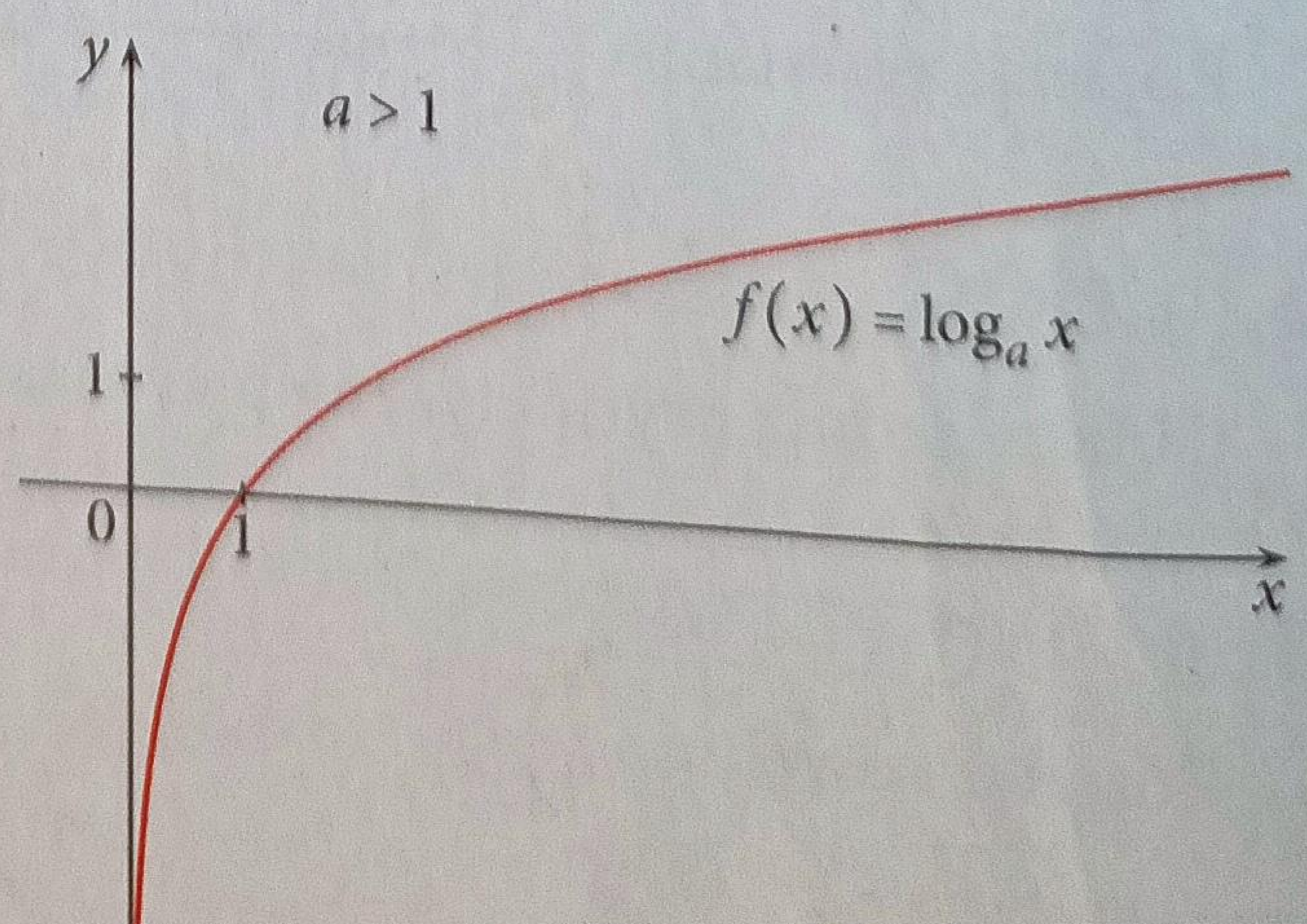
$$\log_a x^p = p \log_a x, \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}$$

Funkcja logarytmiczna

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0;\infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

W zadaniach 27–37 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

27. (0–1)

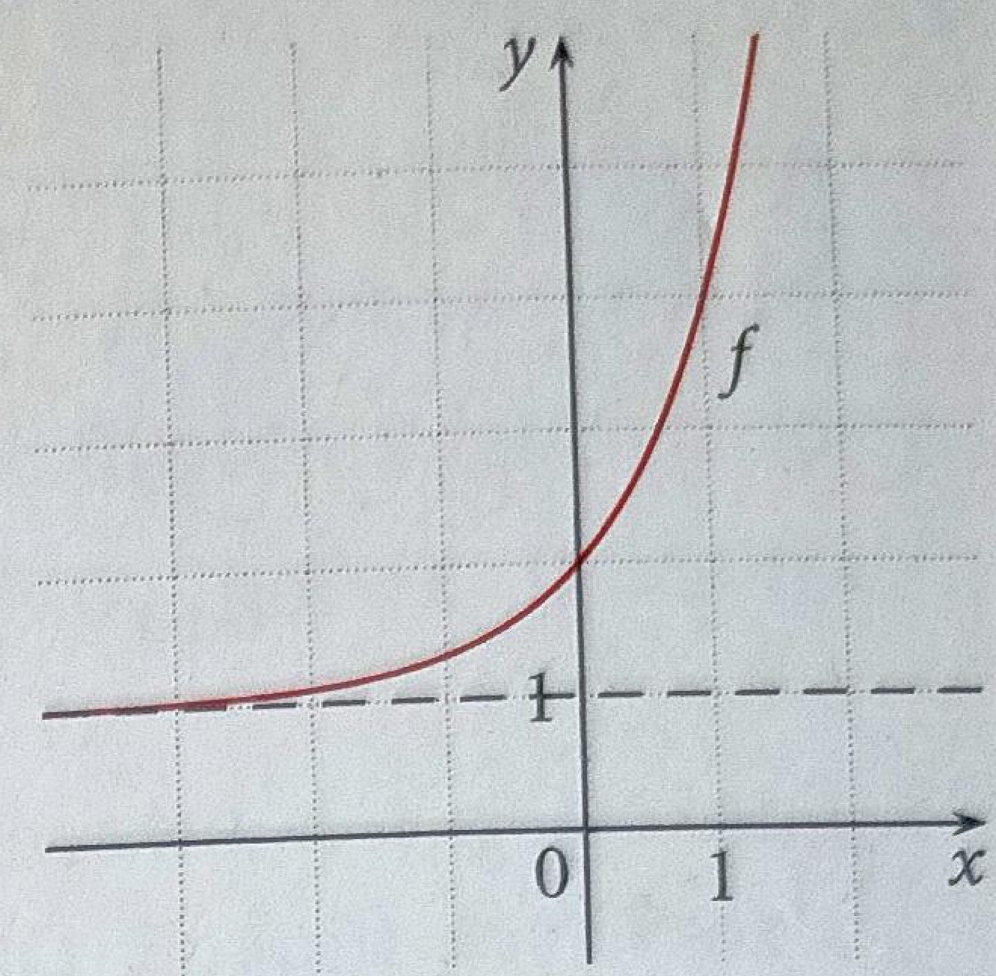
Liczba $\left(0{,}5^{\sqrt{2}} \cdot 2\right)^{\sqrt{2}+1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** 8

28. (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = 3^x + a$$



Funkcja ta przyjmuje wartość 730 dla argumentu

A. $x = 6$ **B.** $x = 9$ **C.** $x = 10$ **D.** $x = 243$

29. (0–1)

Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{64} \cdot 4^x$ otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ o 3 jednostki

A. w dół. **B.** w górę. **C.** w prawo. **D.** w lewo.

30. (0–1)

Która równość jest prawdziwa?

A. $\log_6 18 = 2 + \log_6 2$

B. $\log_6 3 = 2 + \log_6 12$

C. $\log_6 72 = 2 + \log_6 3$

D. $\log_6 144 = 2 + \log_6 4$

31. (0–1) CKE czerwiec 2020 PP

Liczba $\log_5 \sqrt{125}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{3}{2}$

32. (0–1)

Liczba $\log_{\sqrt{3}} 27^6$ jest równa

A. 3 **B.** 9 **C.** 18 **D.** 36

33. (0–1) CKE maj 2021 PP

Suma $2\log\sqrt{10} + \log 10^3$ jest równa

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

34. (0–1) CKE marzec 2022 PP

Wartość wyrażenia $\log_7 98 - \log_7 2$ jest równa

A. 7 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

35. (0–1)

Niech $a = \log_5 15$. Wtedy liczba $\log_5 75$ jest równa

A. a **B.** $a + 1$ **C.** $2a$ **D.** $a + 3$