

Funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym nazywamy funkcję:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

określoną dla  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a, b, c$  są stałymi i  $a \neq 0$ .

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**. Znak współczynnika  $a$  decyduje o tym, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli o równaniu  $y = ax^2 + bx + c$ : do góry ( $a > 0$ ) czy do dołu ( $a < 0$ ).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  nazywamy liczbę  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

### Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

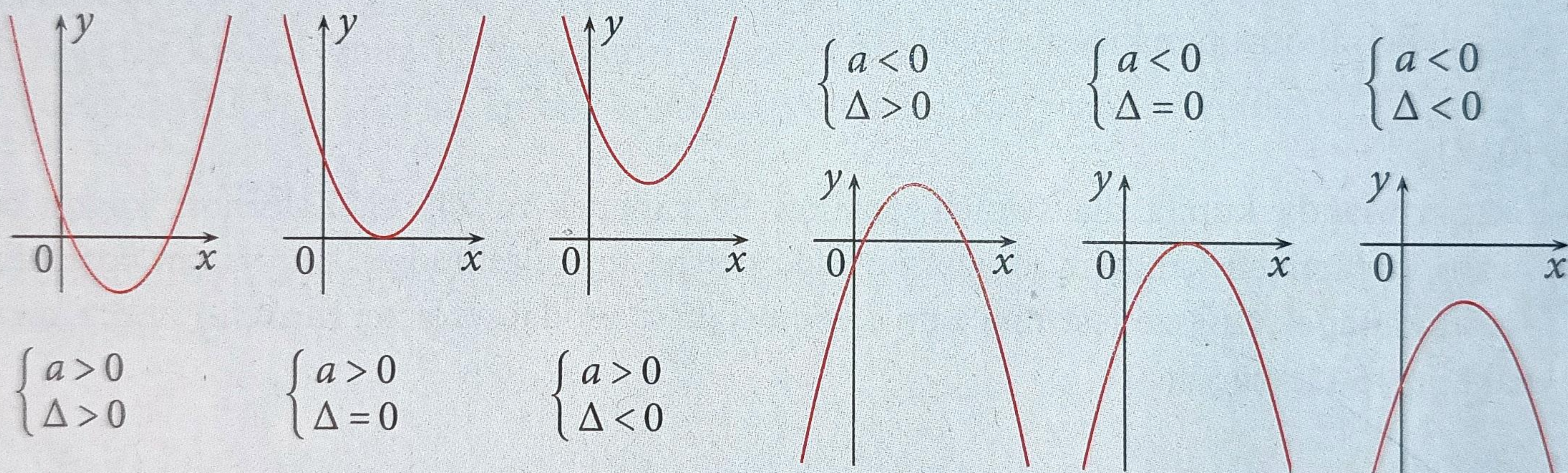
- Jeśli  $\Delta > 0$ , to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli  $\Delta = 0$ , to funkcja ma jedno miejsce zerowe:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  (nazywamy je **pierwiastkiem podwójnym**).
- Jeśli  $\Delta < 0$ , to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  względem osi  $x$



### Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**:  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ .

Współrzędne wierzchołka paraboli:

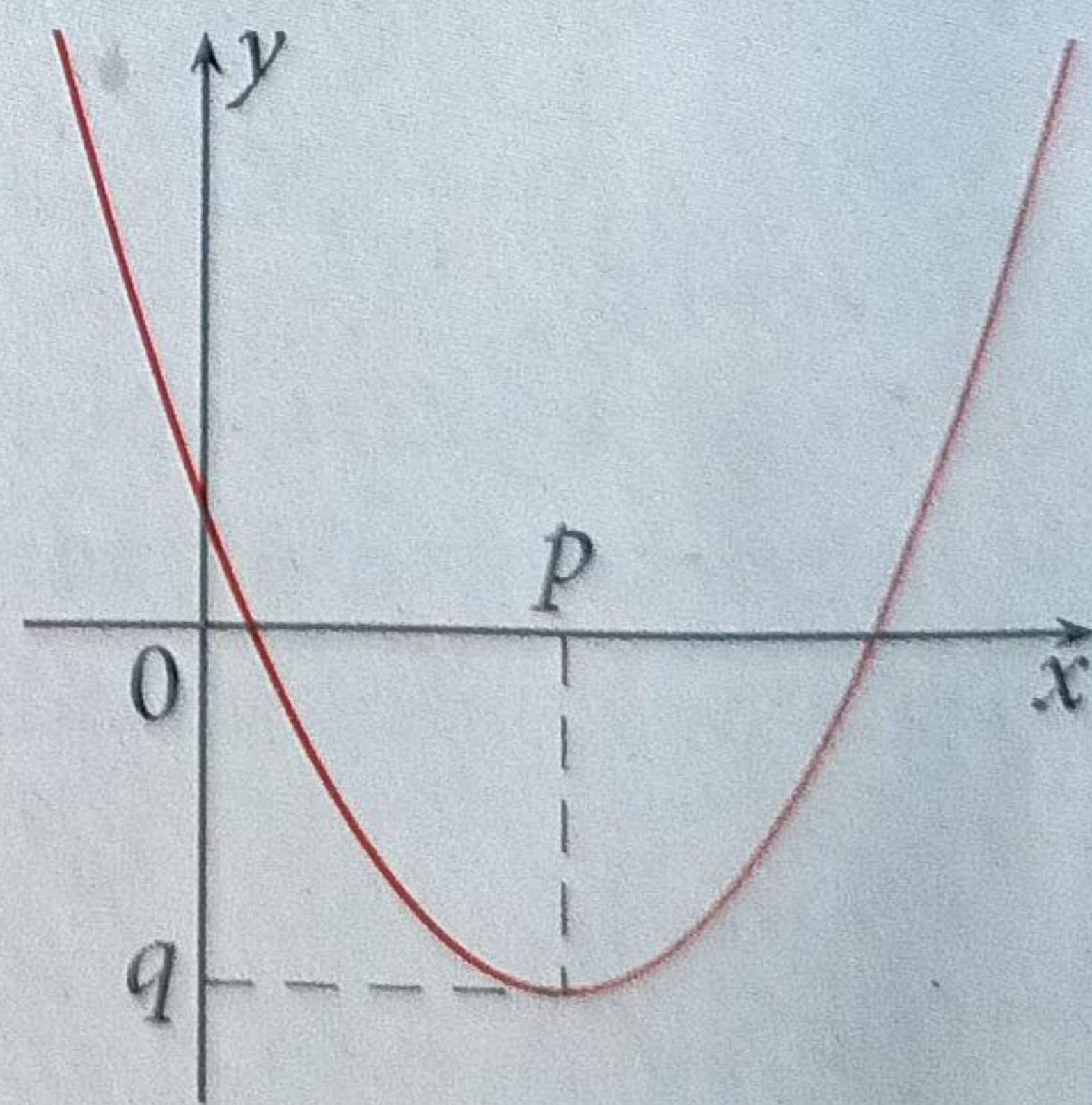
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać **kanoniczna**:  $f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$ .

Współrzędne wierzchołka paraboli:  $(p, q)$ , gdzie:

$$p = -\frac{b}{2a},$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$



- Postać **iloczynowa**:

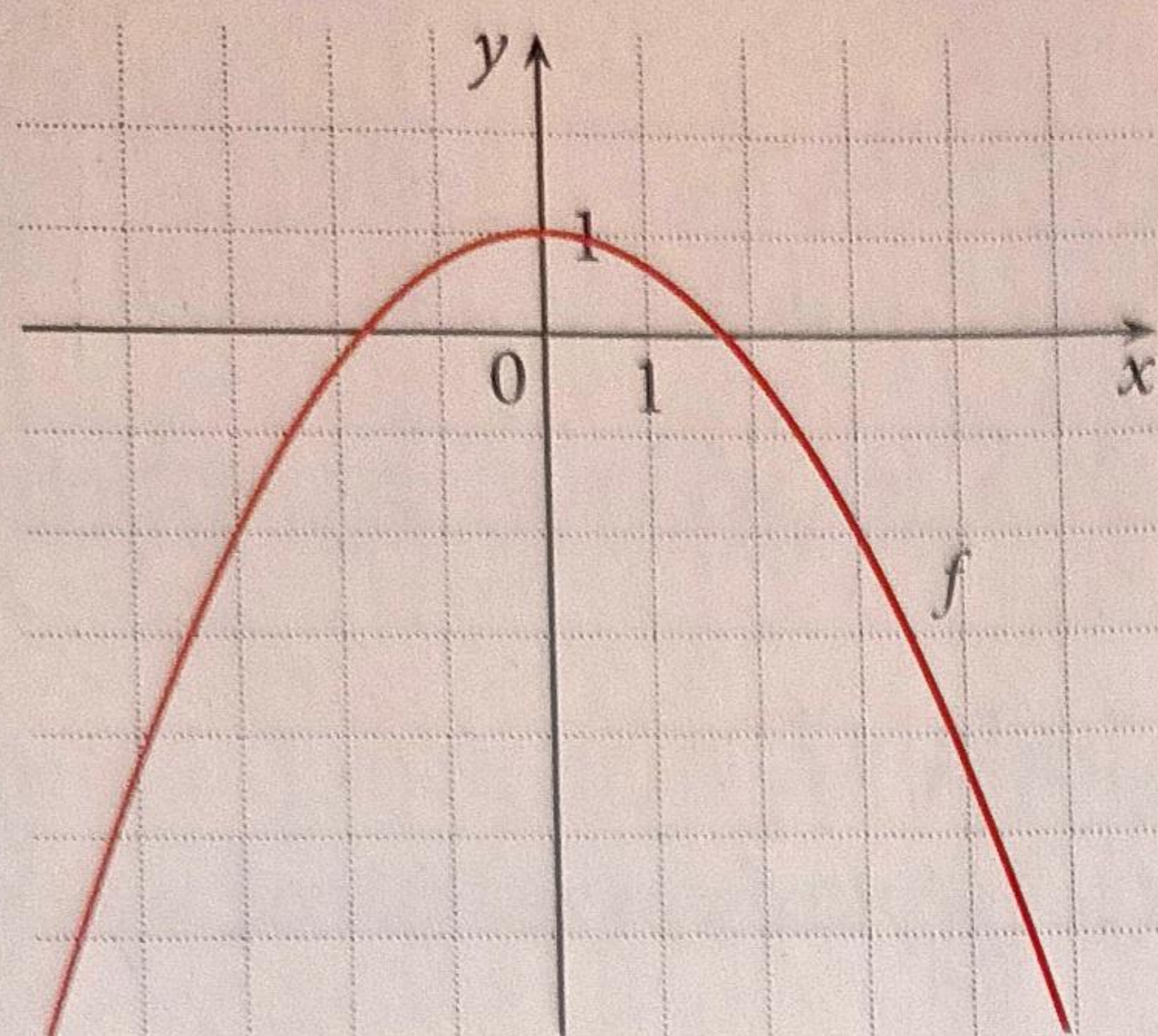
- jeśli  $\Delta > 0$ , to  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , gdzie  $x_1$  i  $x_2$  są miejscami zerowymi;

- jeśli  $\Delta = 0$ , to  $f(x) = a(x - x_0)^2$ , gdzie  $x_0$  jest miejscem zerowym;

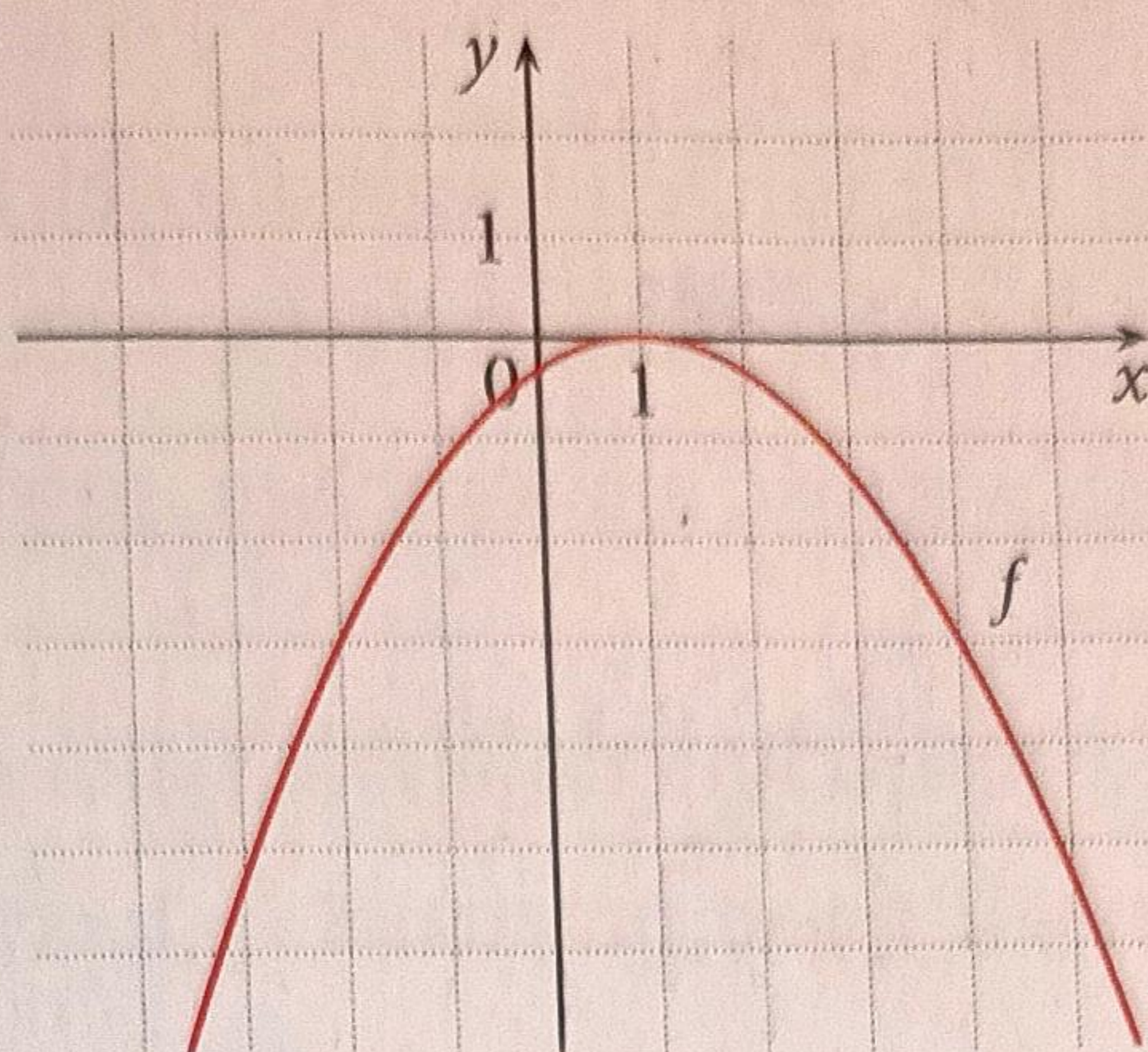
- jeśli  $\Delta < 0$ , to nie istnieje postać iloczynowa.

1. Wykres funkcji  $f$  przedstawiony na rysunku powstał w wyniku przesunięcia paraboli  $y = -\frac{1}{3}x^2$ . Podaj wzór funkcji  $f$ .

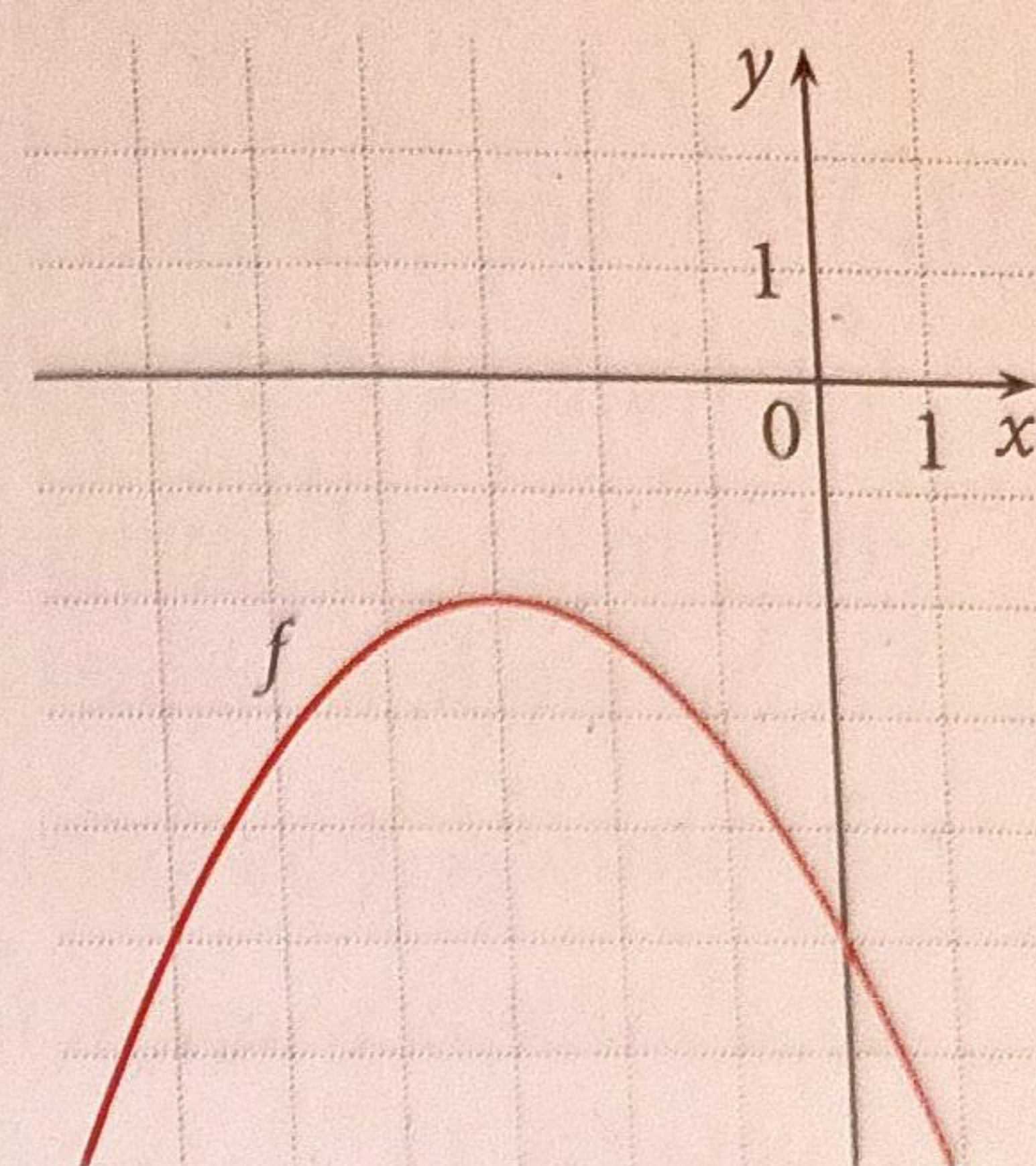
a)



b)



c)



2. Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej zbiór wartości.

a)  $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

b)  $f(x) = x^2 + 6x$

c)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

3. Podaj punkty przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaciach iloczynowej i kanonicznej oraz naszkicuj jej wykres.

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b)  $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

c)  $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 7$

b)  $f(x) = -5x^2 - 15x + 1$

c)  $f(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x - 2$

5. Wykresem funkcji  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W$ . Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  oraz podaj najmniejszą wartość funkcji  $f$ .

a)  $W = (0, 2)$

b)  $W = (0, 0)$

c)  $W = (2, 5)$

d)  $W = (-1, -3)$

6. Zbiorem wartości funkcji  $f(x) = -x^2 + 2x + c$  jest podany przedział. Wyznacz współczynnik  $c$  oraz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

a)  $(-\infty; -2]$

b)  $(-\infty; 0]$

c)  $(-\infty; 4]$

d)  $(-\infty; 3\sqrt{2}]$

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$  i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (jeśli jest to możliwe). Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

a)  $f(x) = x^2 + 4x - 5$

b)  $f(x) = -x^2 + x + 6$

c)  $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

8. Do wykresu funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + bx + c$  należą punkty  $A$  i  $B$ . Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaciach kanonicznej i iloczynowej.

a)  $A = (-1, 0), B = (5, 0)$

b)  $A = (1, 0), B = (0, -3)$

c)  $A = (2, 2), B = (3, 1)$

9. Wyznacz współczynnik  $a$  we wzorze funkcji kwadratowej  $f(x) = a(x+1)^2 - 4$ , jeśli:

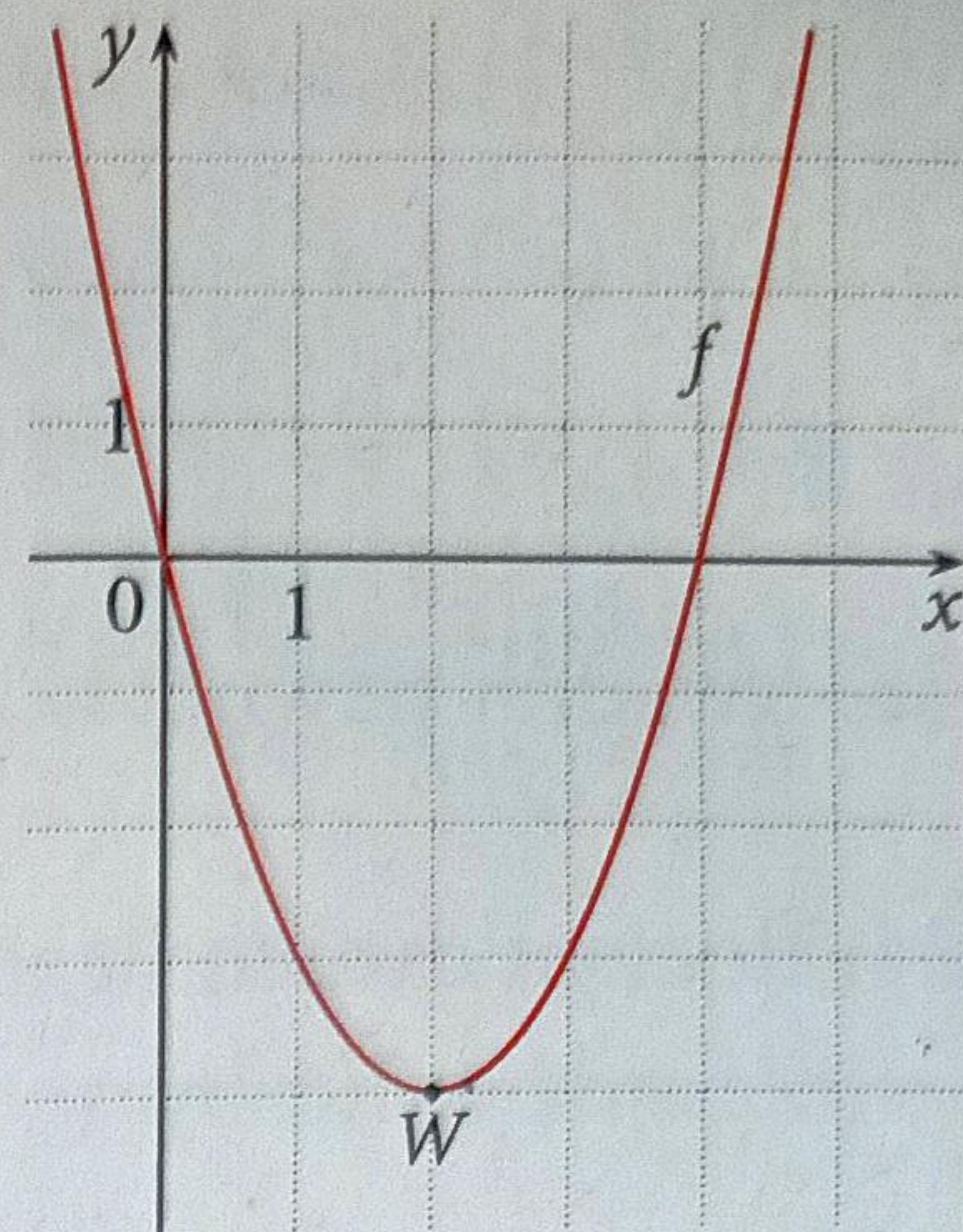
a) wykres funkcji  $f$  przechodzi przez punkt  $P = (2, 14)$ ,

b) jednym z miejsc zerowych funkcji  $f$  jest liczba 1.

W zadaniach 33–40 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

### Informacja do zadań 33–35

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$ . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt  $W = (2, -4)$ . Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji  $f$ .



33. (0–1) CKE maj 2019 PP

Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział

- A.  $(-\infty; 0]$       B.  $[0; 4]$       C.  $[-4; \infty)$       D.  $[4; \infty)$

34. (0–1) CKE maj 2019 PP

Największa wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[1; 4]$  jest równa

- A.  $-3$       B.  $-4$       C.  $4$       D.  $0$

35. (0–1) CKE maj 2019 PP

Ośią symetrii wykresu funkcji  $f$  jest prosta o równaniu

- A.  $y = -4$       B.  $x = -4$       C.  $y = 2$       D.  $x = 2$

36. (0–1) CKE maj 2018 PP

Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 - 6x - 3$  jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

- A.  $(-6, -3)$       B.  $(-6, 69)$       C.  $(3, -12)$       D.  $(6, -3)$

37. (0–1)

Wierzchołek paraboli  $y = x^2 + 4x$  leży na prostej danej równaniem

- A.  $y = -x$       B.  $y = x$       C.  $y = 2x$       D.  $y = 4x$

38. (0–1) CKE maj 2021 PP

Funkcja kwadratowa  $f$  określona wzorem  $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$  jest malejąca w przedziale

- A.  $[1; \infty)$       B.  $(-\infty; 1]$       C.  $(-\infty; -8)$       D.  $[-8; \infty)$

39. (0–1) CKE maj 2020 PP

Równanie  $x(x - 2) = (x - 2)^2$  w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. nie ma rozwiązań.      C. ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $x = 0$ .  
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $x = 2$ .      D. ma dwa różne rozwiązania:  $x = 1$  i  $x = 2$ .

40. (0–1)

Wskaż nierówność, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

- A.  $6x^2 + x + 1 > 0$       C.  $x^2 - 100x + 25 \geq 0$   
B.  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} > 0$       D.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$